

مسائل سری چهارم درس فرایندهای اتفاقی

۱ -  $X(t)$  فرایندی ساکن بمفهوم وسیع، حقیقی، و با باند محدود به  $|f| < 0.5$  است. متوسط آن  $m_X=0$  و قدرت آن  $P_X = 1$  میباشد. ضمناً می دانیم هر نمونه آن  $X(t)$  با نمونه‌هایی که به فاصله  $k$  از آن قرار دارند،  $X(t-k)$  به ازای  $k = 2, 3, 4, \dots$  ناهمبسته است.

(الف) با فرض آنکه  $X(t)$  با  $X(t-1)$  هم ناهمبسته باشد، طیف قدرت آنرا بدست آورید.

(ب) با فرض آنکه  $X(t)$  با  $X(t-1.5)$  ناهمبسته باشد، اولاً همبستگی بین دو نمونه بفاصله  $k = 1$  را بدست آورید و ثانیاً طیف قدرت فرایند را تعیین کنید.

(ج) با فرض آنکه بدانیم طیف قدرت فرایند  $S_X(f) = 1 + 0.96 \cos(2\pi f)$  میباشد تابع تبدیل فیلتری علی پیدا کنید که این فرایند را به فرایندی که نمونه‌های به فاصله  $k = 2, 3, 4, \dots$  آن ناهمبسته است تبدیل نماید.

۲ - فرض کنید  $X[n]$  فرایندی ساکن بمفهوم وسیع با تابع همبستگی  $R_X[m] = 5\delta[m]$  می‌باشد در دو حالت زیر  $E[Y^2[n]]$  و  $R_{XY}[n_1, n_2]$  و  $R_Y[n_1, n_2]$  را بدست آورید.

$$Y[n] = 0.5Y[n-1] + X[n] \quad (\text{الف})$$

$$Y[n] = \begin{cases} 0.5Y[n-1] + X[n], & n \geq 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۳ - فرض کنید  $S[n]$  یک فرایند با تابع همبستگی  $R_S[m] = 2^{-|m|}$  بوده و  $V[n]$  نویز سفیدی عمود بر آن با تابع همبستگی  $R_V[n] = 5\delta[n]$  باشد. بر حسب آندو فرایند  $X[n] = S[n] + V[n]$  را تعریف می کنیم. طیف قدرت  $X[n]$  را در حوزه فرکانس و در حوزه  $Z$  بدست آورید. نشان دهید فرایند  $X[n]$  یک فرایند ARMA است و معادله ARMA را نیز بدست آورید.

۴ - بین نویز سفید نرمالیزه  $V[n]$  (با واریانس واحد) و فرایند  $X[n]$  رابطه  $X[n-k] = V[n] + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)2^{-k} X[n-k]$  برقرار است.

(الف) نشان دهید فرایند  $X[m]$  یک فرایند MA است و معادله MA را بنویسید.

(ب) تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند  $X[n]$  را بدست آورید.

۵ - فرض کنید  $X[n]$  یک فرایند گسسته زمانی است که تمام متغیرهای تصادفی آن توأماً مستقل بوده و هر یک بتواند یکی از مقادیر 1 و 2 را با احتمالات  $\Pr\{X[n]=1\} = 1/3$  و  $\Pr\{X[n]=2\} = 2/3$  اختیار کند. در رابطه با آن فرایند  $Y[n]$  را با رابطه  $Y[n] = \frac{X[n]}{X[n-1]}$  تعریف میکنیم.

(الف) تابع چگالی احتمال و تابع مشخصه متغیر تصادفی  $Y_1 = Y[n_1]$  را بدست آورید.

(ب) تابع متوسط و تابع همبستگی فرایند  $Y[n]$  را تعیین کنید.

(ج) طیف قدرت فرایند  $Y[n]$  را در حوزه فرکانس محاسبه کنید

۶ - طیف قدرت یک فرایند گسسته زمان ساکن بصورت  $S_X(f) = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi f)}$  در دست است. متوسط فرایند را

صفر و  $\alpha$  را عددی کوچکتر از واحد در نظر بگیرید.

(الف) تابع همبستگی فرایند را بدست آورید و ضریب همبستگی بین دو متغیر تصادفی مجاور یکدیگر فرایند را بیابید.

(ب) چگونه میتوان این فرایند را بصورت علی از روی یک فرایند سفید تولید کرد؟

(ج) تابع همبستگی فرایند  $Y(n)$  را که با رابطه  $Y(n) = X(n) - 2\alpha X(n-1) + \alpha^2 X(n-2)$  تعریف میشود را بدست آورید.

۷ - فرایند  $X[n]$  فرایندی با نمونه‌های مستقل از هم بوده و هر نمونه یکی از دو مقدار  $+1$  و  $-1$  را با احتمال  $0.5$  اختیار می‌نماید.

در ارتباط با آن فرایند دیگری بصورت  $Y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X[n-k]$  تعریف می‌گردد.

الف) تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند  $X[n]$  را بدست آورید.

ب) مقدار متوسط، تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند  $Y[n]$  را بدست آورید.

ج) تابع مشخصه نمونه  $n$  ام فرایند  $X$  و همچنین تابع مشخصه نمونه  $n$  ام فرایند  $Y$  را بدست آورید. تابع چگالی احتمال نمونه  $n$  ام فرایند  $Y$  را نیز بدست آورید.

د) تابع چگالی احتمال شرطی نمونه  $n$  ام فرایند  $Y$  وقتی کلیه نمونه‌های قبلی آن معلوم است را نیز حساب کنید.

۸ -  $X[n]$  یک فرایند AR با معادله تفاضلی  $\sum_{k=0}^N a_k X[n-k] = b_o V[n]$  میباشد که در آن  $a_o = 1$  ,  $V[n]$  نویز سفید با

واریانس واحد است. ثابت کنید که اگر ریشه‌های معادله  $\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0$  همگی داخل دایره بشعاع واحد باشند. رابطه زیر برقرار

است.

$$\sum_{k=0}^N a_k R_X[m-k] = \begin{cases} 0, & m \geq 1 \\ |b_o|^2, & m = 0 \end{cases}$$